## II. *De Curvarum Tangentibus è Maximorum ac Minimorum Theoriâ immediatè deductis: Unâ cùm Theorem: quibusdam ad Sectiones conicas pertinentibus, ejusdem calculi auxilio investigatis. Autore* Humphrido Dittono.

TAngentium methodum propono, facilem satis ac generalem, imò generalissimam, ut pote curvis omnibus unâ eâdemque opera inservientem. Neque novam vocare metuo, cùm celebriorum Geometrarum nullus (in quantum unquam scire potui) aliquid hujus generis publici juris fecit. Pauca tantum ejus specimina hîc in medium profero, nire enim tum clarâ ac apertâ exemplorum multitudine non indigetimus!

Sit Curva A G H, cujus vertex A, axis A K, ordinatim applicata F D centrumque (siquod habet) punctum K. Sumpto puncto L in Axe sit $AL = n$, $AD = x$, $FD = y$, $FL = z$; quarum quantitatum, tres posteriores sunt fluentes, prior verò *n* permanens ac stabilis, hæc enim una eademque prioribus variis semper respondet. Ex Triangulo Rectangulo F D L, hanc habemus Equationem, $zz = y\dot{y} + nn - 2nx + xx$; determinandoque *z* ad extremum, oritur $2y\dot{y} - 2n\dot{x} + 2x\dot{x} = 0$; unde interpretando $2y\dot{y}$ secundum propriam Curvæ naturam, relinquetur quantitas *n* exposita in terminis etiam Curvæ propriis.

Cùm verò *z* hoc modò ad valorem extremum determinatam habeamus; hoc est, linea F L omnium quæ *a* puncto L ad Curvam duci possunt vel maxima vel mi-

 nima

nima ſit, indeque ad Curvam in puncto F normalis; ipſam DL eſſe ſubnormalem patet, ex quâ ſubtangens nullo negotio eruitur.

In exemplum producatur primò Parabola Apolloniana, quàm curvam hîc delineatam eſſe ſupponemus. Habemus ergo $2 y\dot{y} = r\dot{x}$ (poſito Parametro $= r$) unde $rx - 2nx + 2xx = 0$, & $n = \frac{r}{2} + x$, ergoque DL ſubnormalis $= \frac{1}{2}r$. (Cujus Theorematis ſenſus hîc eſt, viz. Si ultra terminum D abſciſſæ AD, deſignetur DL ſemiparametro equalis, atque à puncto L producatur LF recta ad punctum F; recta ſic ducta Parabolæ in puncto F normalis erit, & omnium quæ à puncto L, ad Curvam duci poſſunt minima. Dico minimam; alicui enim curvæ naturam ac indolem ſcienti, apparet Maximam eſſe non poſſe (idquod in ſequentibus notatum velim) ſed neceſſario eſt vel maxima vel minima, ideoque poſterior.) Hæcque pars prior eſt Theor. 5. Lib. 7. Conicor. Præclariſſimi de La Hire.

Ducatur ordinata EB, junganturque puncta E, L; ſit intercepta $BD = f$, unde $AB = x - f$, & $BL = \frac{r}{2} + f$. Jam $LE^q = \frac{rr}{4} + rx + ff$, & $FL^q = \frac{rr}{4} + rx + ff$, & $FL^q = \frac{rr}{4} + rx$, ergo $LE^q - FL^q = BD^q$; quæ pars poſterior eſt Theorem. 5. ejuſdem Lib. Conicor.

Quò propriùs punctum F in quò curvam normalis ſecat, puncto A ſive vertici admovetur; eò propiùs etiam punctum L eidem venit. Ergo quando F cùm A coin-

A coincidit, & ſic evanеſcit ordinata F D, tunc ipſa Minima jacet in Axe A K, & ſemiparametri quantitatem adequabit. Hoc eſt in illo caſu $n = \frac{1}{2} r$ tantum; in nihilum abeunte $x$ abſciſſâ ad ordinatam evaneſcentem pertinenta. Si ergo $A L = n = \frac{1}{2} r$, ſumpto punčto D inter A & L, fiat $A D = x$; tum oritur

$$F L^{q} = \frac{r r}{4} + x x, \text{ ergo } F L^{q} - A L = x x,$$

hoc eſt $F L^{q} - A L^{q} = A D^{q}$ ſemper. Ejuſdemque tenoris eſt Theor. 2. Lib. 7. Conicor. de La Hire.

Secundò ſit curva quædam ordinis Parabolici ſuperiors, cujus æqnatio $r^{p-q} x^{q} = y^{p}$.

Tum $y y = r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q}{p}}$, adeoque

$$2 y \dot{y} = \frac{2q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}} \dot{x};$$ ſubſtituendoque hunc valorem loco $2 y \dot{y}$ in æquatione generali determinante $z$ ad tremum, habemus inde $n = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}} + x$; & propterea ſubnormalis $D L = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}}$

Hoc verò singulis hiscè curvis facillimè applicatur, si indices p & q secundum unius cujusque naturam ac genium debito modo exponantur.

Supponetur tertiò Curvam esse Ellipsiu cujus ½ Axis Mador A K; ex cujus etiam equatione consequitur $2 y \dot{y} = r \dot{x} - \frac{2 r x \dot{x}}{q}$. Unde provenit

$$r \dot{x} - \frac{2 r x \dot{x}}{q} - 2 n \dot{x} + 2 x \dot{x} = 0, \;\&$$

$n = \frac{r}{2} + x - \frac{r x}{q}$, ac propterea $\frac{r}{2} - \frac{r x}{q}$ subnormali D L equalis. Sivero ellipseos loco substitueretur Circulus, equationem eodem modo tractando, inveniemus $DL = r - x$, posito $r$ Circuli Radio æquali.

Sed ad Ellipsiu revertendum, cujus alia proprietas ex hoc fonte deducenda est, prout in Parabolâ factum. Sit $BD = f$, unde $AB = x - f$. Habemus $LE^q$ ($= LB^q + EB^q$) $= \frac{rr}{4} - \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq} + ff + rx - \frac{rxx}{q} - \frac{rff}{q}$: & $FL^q$ ($= FD^q + LD^q$) $= rx - \frac{rxx}{q} + \frac{rr}{4} - \frac{rrx}{q} + \frac{rrxx}{qq}$: Ergo, $LE^q - LF^q = ff - \frac{rff}{q}$;

Hoc verò est Theor. 6. Lib. 7. Conic. de La Hire.

Postulat enim Geometra ille sublimis, ut sit $q.\, r.\, \frac{q}{2} - x ::$ L D, cujus valor est $\frac{r}{2} - \frac{r x}{q}$ prout supra inventum;

ventum; ideoque quarta proportionalis est tribus aute positis: Hoc verò ei concesso, L F esse minimam omnium rectarum quæ à puncto L ad Ellipsin duci possunt evidenter demonstrat. Preterea quoniam est $q : q - r :: f : f : f - \frac{fr}{q}$, Ergo $\square\, ff - \frac{rff}{q}$ sive $f \times f - \frac{fr}{q}$, idem est quòd rectangulum apud D De La Hire exemplar vocatum: Hoc verò exemplar secundum ejus definitionem, est Rectangulum simile Rectangulo, differentiam inter Quadratum Axis Transversi & Figuram constituenti (hoc est Rectangulo $qq - qr$) & preterea ad Rectam B D sive f applicatum. Et quòd Rectangulum $ff - \frac{rff}{q}$ omnes hasce conditiones possideat, luce Meridianâ Clarius est.

Notetur, ex valore quantitatis *n* supra invento, planè consequi $n > \frac{r}{2}$. Nam $n = \frac{r}{2} + x + \frac{rx}{q}$, ergo

$$qn + rx = \frac{qr}{2} + qx,$$ sed (propter $q > r$) $qx > rx$,

ergo, $qn > \frac{qr}{2}$, & $n > \frac{r}{2}$.

Quando (ut in Parabola modò observatum) punctum F in A verticem incidit, ipsa Minima in Axe designatur; & propter evanescentem *x*, habemus $n = \frac{r}{2}$: Assumptoque quovis puncto D inter A & L, si A D = alicui x, comparando emergit $FL^q - AL^q = xx - \frac{rxx}{q}$; quòd ipsum est Theor. 3. Lib. 7. Conic.

D. La

D. La Hire. Quoniam enim est $q : q - r :: x : x - \frac{rx}{q}$, patet $\square\ xx - \frac{rxx}{q}$ esse exemplar, sed applicatum ad abscissam $x$; & preterea hoc esse mensuram adequatam defectûs, quadrati Minimæ à quadrato cujus vis rectæ alterius, ab eodem puncto ad curvam protensæ; hæcque demonstrat ille loco citato.

Theoremata verò ad Axem minorem sive conjugatum ellipseos spectantia (hactenus enim majore sive Transverso usi fuimus) eodem planè modo determinantur. Sit jam A K Axis Minoris $= \frac{c}{2}$, Parameter $= R$; punctum L jam ultra centrum, adalteras partes G K collocari supponitur. Operando ut priùs, invenietur A L sive $n = \frac{R}{2} + x - \frac{Rx}{c}$, & subnormalis $DL = \frac{R}{2} - \frac{Rx}{c}$. Hoc est $c : R :: \frac{c}{2} - x : \frac{R}{2} - \frac{Rx}{c}$, adeoque ducta F L omnium quæ à puncto L ad ellipsin duci possunt Maxima, & $LF^q - LE^q = \frac{Rff}{c} - ff =$ Rectangulo exemplar ad B D (sive f) applicato. Quòd verò hoc sit exemplar, patet, est enim $c : R - c :: f : \frac{Rf}{c} - f$, adeoque ex definitione, $\frac{Rf}{c} - f \times f =$ Exemplari. Hoc verò Theor. est 7 Lib. 7 Conicor. De La Hire.

Iterum;

Iterum; Puncto F cùm A coincidente; propter evanescentem $x$ evanescentis tunc temporis ordinatæ, relinquitur $n = \frac{R}{2}$, & A L omnium quæ à puncto L ad Ellipsin duci possunt Maxima, & $AL^q - FL^q = \frac{Rxx}{c} - xx =$ Exemplari ad A D sive x applicato; eodemque modo sonat. Theor. 4. Lib. prædicti Conicorum.

Observandum verò ad casum precedentem (quòd priùs ergo notari debuit) ubi invenimus $n = \frac{R}{2} + x - \frac{Rx}{c}$, quòd $n > \frac{R}{2}$; nam $cn + Rx = \frac{Rc}{2} + cx$, & propter $R < c$, adeoque $Rx < cx$, relinquitur $cn > \frac{Rc}{2}$, & $n > \frac{R}{2}$.

Jam verò ut res in Ellipsi peracta est, sic eodem prorsus modo in Hyperbola peragenda foret, Minimæque in hâc curvâ lineæ determinandæ: sed talis inter hasce curvas connectio, tam facilisque ab unâ ad alteram transitus, ut vel Tyronibus ipsis labor inanis videatur. Nil aliud restat, v. gr. ad subnormalem determinandam, quàm ut signum $-$ in $+$ mutetur. Nam cùm in Hyperbolâ sit $2y\dot{y} = r\dot{x} + \frac{2rx\dot{x}}{q}$, & $n = \frac{r}{2} + x + \frac{rx}{q}$ (æquatione generali) manet $DL = \frac{r}{2} + \frac{rx}{q}$.

Concipietur Quarto Curvam M S N ( in altera Fig. Fig. parte delin. Esse unam ex Hyperboloidibus, cujus Asymptoti A K, K H, rectamque S R ad Asymptoton K H ordinatam, S R sit $= y$, S P $= z$, K R $= x$, K P $= n$, quæ hîc necessariò minor erit quàm $x$, ut consideranti patet. Equatio curvæ propria est $y^p x^q = r^q s^p$ cujus loco ( propte r & s quantitates determinatas ) scribi possit $y^p = x^{-q}$, adeoque

$$y^2 = x^{\frac{-2q}{p}}, \quad \& \; 2y\dot{y} = -\frac{2q}{p} \cdot \dot{x} x^{\frac{-2q-p}{p}};$$ hinc cum

$zz = yy + xx - 2nx + nn$, pro extremo habemus

$$2y\dot{y} + 2x\dot{x} - 2n\dot{x} = 0, \text{ hoc est } -\frac{2q}{p}\dot{x} x^{\frac{-2q-p}{p}}$$

$$+ 2x\dot{x} = 2n\dot{x}, \quad \& \; n = x - \frac{q}{p} x^{\frac{-2q-p}{p}}$$

adeoque subnormalis P R $(= x - n) = \frac{q}{p} x^{\frac{-2q-p}{p}}$.

Curvam jam A F G ( ultimo loco ) Cycloiden primariam concipiamus; sitque $r$ Radius, $c$ Arcus & $y$ ordinata Circuli genitoris, cujus Diameter per A K repræsentatur centrumque inter L & K positum. Tum vocatâ F D cycloidis ordinatâ $a$, cæterisque ut priùs; curvæ equatio est $aa = yy + 2cy + cc$, adeoque $zz \; (= aa + nn - 2nx + xx) = yy + 2cy + cc + nn - 2nx + xx$, & ( $z$ ad extremum determinatâ )

natâ) $2y\dot{y} + 2c\dot{y} + 2y\dot{c} + 2cc - 2nx + 2xx = 0$.

Est verò $\dot{y} = \frac{r\dot{x} - x\dot{x}}{y}$, & $\dot{c} = \frac{r\dot{x}}{y}$, ergo hos valores substituendo, ac equationem debitè reducendo, habemus $2r - + \frac{2rc - 2xc}{y} + 2r + \frac{2cr}{y} = 2n - 2x$; ac propterea $2r - x + \frac{2rc - xc}{y} = n - x =$ DI. subnormali.

Incomparabilis D. Barovius subtangente præcognitâ, ad Maximum & Minimum determinandum utitur; hocque idem post eum fecit D. Neiwentiit in suâ infinitorum Analysi. Cùm verò multis aliis Methodis, in quibus nihil omnino de Curvarum Tactione presupponitur, Maximum ac Minimum inveniri queant, palàm est è Maximis & Minimis ad Tangentes determinandas, tutò ac legittimè procedere posse.

---

## COROLL. I.

EXempla hactenus oblata percurrenti, in singulis vis patebit, quòd $2y\dot{y} - 2n\dot{x} + 2x\dot{x} = 0$, posito nempè loco $n$ in hâc equatione, valore ejus secundum curvæ naturam. In Hyperboloidibus ergo

ex. gr. $\frac{2q}{p} \cdot xx^{-\frac{2q-p}{p}} - 2xx + \frac{2q}{p} \cdot xx^{-\frac{2q-p}{p}} + 2xx = 0$, quod (ipſo oculo judice) manifeſtum eſt; & ſic in aliis (ſine ullâ demonſtratione) veritas facilè perſpicietur.

---

## COROLL. II.

Ex ſubnormalium inventione, curvarum ordinatas Maximas & Minimas facile determinabimus. Hâcque in re dico, ſi ſubnormalis (pro aliquo curvæ puncto) nihilo ponatur equalis, habemus ordinatam iſtius curvæ ad extremum determinatam; & quidam maximam ſi ad partes curvæ concavas, minimam verò ſi ad convex applicari intelligatur. Ex. gr. in Circulo (poſitâ ſubnormali $= l$) eſt $l = r - x$; ſit $r - x = 0$; ergo $r = x$, ac nide $y = r$, hoc eſt applicata maxima Radio equalis. Similiter in Ellipſi, $l = \frac{r}{2} - \frac{rx}{q}$; ſit $\frac{r}{2} - \frac{rx}{q} = 0$, tum $rq = 2rx$, ac $x = \frac{q}{2}$, ergo $yy = \frac{rq}{4}$ = 4tæ parti Figuræ (ut vocant) ſive ſemiaxis conjugati quadrato, adeque maxima $y$ = iſti ſemaxi. Nec Methodo diſſimili cùm aliis curvis operandum foret; inveniatur ſubnormalis ex equatione datâ, eâque nihilo equali

equali positâ, ordinatam curvæ maximam vel minimam determinatam habebimus; priorem ad partem curvæ versus axem concavam, posteriorem ad convexam.

---

## *POSTSCRIPTUM*

### *Prioribus sequentia hæc (notatu non indigna) adjungi possunt.*

PRimò æquè facilè hâc methodo determinari Tangentem, ad partes curvæ convexas operando, ac ad partes concavas uti priùs. Sit enim A C Tangens verticalis inque eâ ad libitum sumpto puncto C, sit $AC = n$, $CO = z$ (quò etiam charactere omnes lineæ, à puncto C ad curvam convexam A E G ductæ, insigniantur) ergo ductâ M O semper ad A C perpendiculari, erit $CM = n - y$, & cùm $OM = x$, erit $zz = nn - 2ny + yy - xx$, adeoque (pro extremo ipsius z valore) $2y\dot{y} + 2x\dot{x} - 2n\dot{y} = 0$. In quâ equatione si exponatur $2x\dot{x}$ secundum curvæ naturam, lineam C Z (quæ hoc loco subnormalis vicem subibit) determinatam dabimus. Res clarior est quàm quæ exemplis Illustrantibus indigeat; quæque jamjam dicta sunt facile hoc opus excusabunt.

Secundò, Sicut Methodo priore, (Curvarum Tangentes invenimus) ipsius lineas L E vel C O à puncto

dato vel in Axe vel in Tangente verticali ſumpto productas, ad extremum determinando; ſic etiam conſiderando lineas Q E, &c. à puncto in Axe dato ultra verticem productas, idem (idque Univerſaliter) perficere poſſumus. Omnes enim lineæ Q E valoris fluentis ſunt ac perpetuò mutabilis, ſola verò Tangens Q F (poſito quòd Q F curvam tangat) ſtabilis eſt ac ad unicum valorem determinata. Hoc ergo loco, τȣ extremi Hypotheſi non innitemur, ſed quantitatem permanentem tantum ſpeculabimur. Aſſumantur duo puncta Q L, indeque ad idem curvæ punctum E duæ ſemper lineæ ducantur L E, Q E. Inter punctum F contactus ac verticem, angulus Q E L ſemper erit obtuſus, ad alteras verò partes puncti F acutus erit, ſuppoſito (quod priùs monitum) Q F curvam tangere, ac F L ei ad angulos rectos inſiſtere. Sit Q A = p. A L = n. A B = x. B E = y. Q E = z. V E (intercepta inter punctum E & V ubi cadit Q V perpendicularis ab Q in L E productam) = v. Jam propter Triangulum obtuſangulum Q E habemus hanc equationem

$$zz = p^2 + 2pn - y^2 - x^2 + \overline{y^2 + n^2 - 2nx + xx}|^{\frac{1}{2}} \times 2v;$$

ſive loci $\overline{y^2 + n^2 - 2nx + xx}|^{\frac{1}{2}}$ ſcribendo f, eſt $zz = p^2 + 2pn - y^2 - x^2 + 2nx - 2fv$, ideoque

$$2z\dot{z} = 2y\dot{y} - 2x\dot{x} + 2n\dot{x} - 2f\dot{v} - 2v\dot{f}.$$

Si z jam ſiat quantitas ſtabilis, quò in Caſu Q E cùm Q F tangente coincidet, erit tum

$$-2y\dot{y} - 2x\dot{x} + 2n\dot{x} = 0$$

(rectangulo 2 f v ejuſque adeo fluxione penitus evaneſcente.) Hæc verò eſt ipſa equatio Generalis Methodo ſuperiori determinata,

quæque

quæque uti-videmus non minus facilè ac naturaliter ex hoc ſuppoſito quantitatis ſtabilis principio, quàm ex illo extremi deducitur.

